

27

Сопряженное пространство, связь между
сепарабельностью исходного и сопряженного
пространства

Пр-во лнн. орг. ф-ов над X наз-ся **соп-
ряженным**: $X^* = \mathcal{L}(X \rightarrow \mathbb{R})$

Пр-во $\phi \in \mathcal{L}$ имеет счетное всюду плот-
ное лнн-во наз-ся **сепарабельным**

▽ If X^* сепарабельно, то X - тоже сепар.

Р-м сферу $\|x^*\| = 1, x^* \in X^*$ на сфере $\{x_n^* \}_{n=1}^{\infty}, \|x_n^*\| = 1$
всюду плотное лнн-во $\|x\| = 1 \Rightarrow \sup_{\|x\|=1} |x_n^*(x)| = 1 \Rightarrow \exists$

$x_n^* \in X, \|x_n\| = 1$, и $|x_n^*(x_n)| > 1/2$ Р-м $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ наши
выбранные, и р-м лнн-ком $\gamma, x_1 + \dots + \gamma_n x_n$ Р-м
 $M = \{d_1 x_1 + \dots + d_n x_n, d_k \in \mathbb{R}\}$, $\bar{M}$ - замыкание M Если

$\bar{M} = X$, то все гак-но; иначе, $\bar{M} \neq X$, берем $x_0 \notin \bar{M}$,
 $x_0 \neq 0$. По лемме 2, $\exists$ сф-е $x_0^*, \|x_0^*\| = 1, x_0^*(x_0) \neq 0$
 $x_0^*(x') = 0 \forall x' \in \bar{M}$; $0 = |x_0^*(x_n)| = |(x_0^* - x_n^*)(x_n)| +$

$+ |x_n^*(x_n)| \geq |x_n^*(x_n)| - |(x_0^* - x_n^*)(x_n)| > \frac{1}{2} - \|x_0^* - x_n^*\|$

$\|x_n\| \geq \frac{1}{2} \quad (7.1)$

$\downarrow$

$\bar{M} = X$

Ч.П.Д.

много стало
судно сдвинулось
здесь сепар-н